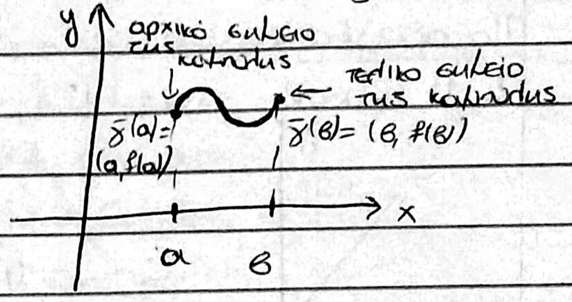
Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ No. 18ο Date 5/12/2016

Παράδειγμα

Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε η $\bar{\gamma}(t)=(t,f(t))$, $t\in[a,b]$
είναι μια καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$ και το γράφημα της f,
$\Gamma_f=\{(t,f(t)): t\in[a,b]\}$ είναι η εικόνα της $\bar{\gamma}$,
$\bar{\gamma}([a,b])=\{(t,f(t)): t\in[a,b]\}$ (η συλλογή των τιμών)
$\Rightarrow \boxed{\Gamma_f=\bar{\gamma}([a,b])}$
Το γράφημα είναι σε καρτεσιανό γινόμενο και στον $\mathbb{R}^2$ εδώ



→ Το γράφημα της f είναι η εικόνα της καμπύλης.

Παρατήρηση: Αν $f\in C^1([a,b])$, τότε $\bar{\gamma}'(t)=(1,f'(t))\Rightarrow$
$\|\bar{\gamma}'(t)\|=\sqrt{1+|f'(t)|^2}\neq 0 \quad \forall t\in[a,b]$
$\Rightarrow$ Η $\bar{\gamma}(t)=(t,f(t))$ είναι κανονική

Ορισμοί:

1. Αν $I=[a,b]$ και $\bar{\gamma}(a)=\bar{\gamma}(b)$, η καμπύλη $\bar{\gamma}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ λέγεται κλειστή.
2. Αν $\bar{\gamma}: I\to\mathbb{R}^n$ είναι 1-1 η καμπύλη $\bar{\gamma}$ λέγεται απλή.
3. Μια κλειστή καμπύλη λέγεται απλή αν $\bar{\gamma}|_{[a,b)}$ είναι 1-1.

Παραδείγματα: (για τους αντίστοιχους ορισμούς)

1. $\bar{\gamma}(t)=(\cos t,\sin t)$, $t\in[0,2\pi]$ κλειστή
2. $\bar{\gamma}(t)=(t,f(t))$, $t\in[a,b]$
$f\in C([a,b])$ είναι απλή [Δηλ. $\bar{\gamma}(t_1)=\bar{\gamma}(t_2)\Leftrightarrow(t_1,f(t_1))=(t_2,f(t_2))$
$\Leftrightarrow t_1=t_2 \wedge f(t_1)=f(t_2)\Rightarrow t_1=t_2$]
3. Η $\bar{\gamma}(t)=(\cos t,\sin t)$, $t\in[0,2\pi]$ είναι απλή κλειστή καμπύλη
Ενώ η $\bar{\gamma}_1(t)=(\cos t,\sin t)$, $t\in\mathbb{R}$ είναι κλειστή αλλά δεν είναι απλή

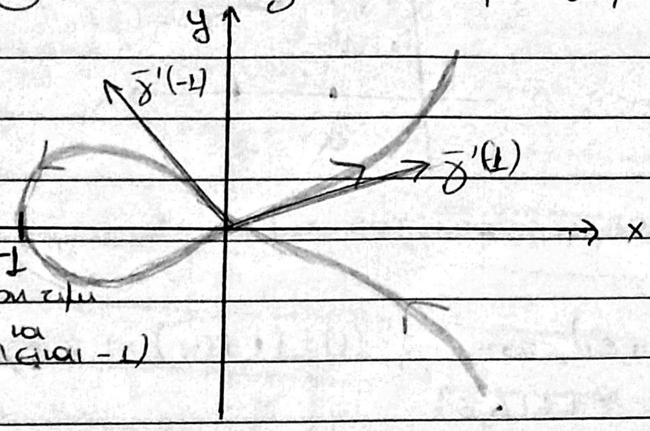
Παρατήρηση:

→ Κλειστή καμπύλη = «κλείνει»

→ Απλή καμπύλη = κάθε σημείο της εικόνας της καμπύλης αντιστοιχεί σε μια μόνο τιμή της παραμέτρου t, [δηλ. ένα σωματίδιο περνάει από κάθε σημείο της (εικόνας της) καμπύλης μόνο 1 φορά]

Παραδείγματα:

1. Η καμπύλη $\bar{\gamma}(t) = (t^2-1,\ t^3-t),\ t\in\mathbb{R}$



(η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει το x είναι -1)

Βγαίνει θέτοντας:

→ $x = t^2-1$

→ $y = t^3 - t = t(t^2-1) = t\cdot x$

→ $\bar{\gamma}'(-1),\ \bar{\gamma}'(1)$ είναι 2 διανύσματα ταχύτητας.

$(0,0) = \bar{\gamma}(-1) = \bar{\gamma}(1)$

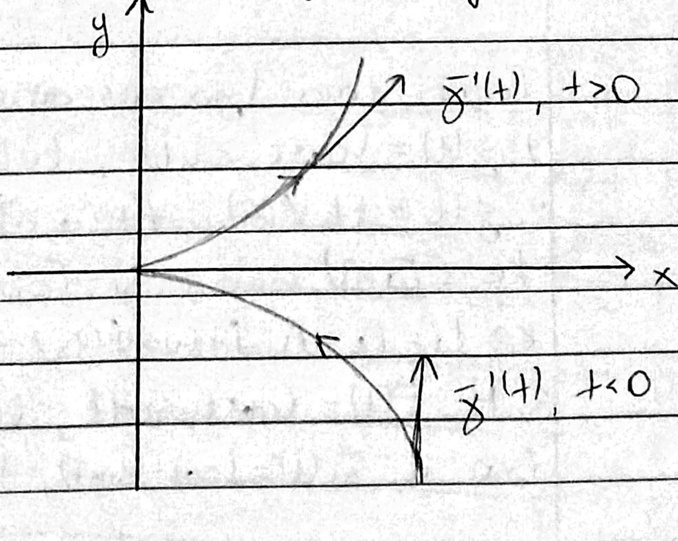
Αυτή η καμπύλη δεν είναι απλή

2. Η καμπύλη του Neile, $\bar{\gamma}(t) = (t^2, t^3)$, $t\in\mathbb{R}$ έχει εικόνα $\bar{\gamma}(\mathbb{R}) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0,\ y^2 = x^3\}$ και εφαπτόμενο διάνυσμα

$\bar{\gamma}'(t) = (2t, 3t^2) = t(2,3t) \neq 0 \iff t\neq 0$

$\Rightarrow$ η $\bar{\gamma}$ δεν είναι κανονική αλλά έχει το ιδιάζον (singular) σημείο $\bar{\gamma}(0) = (0,0)$

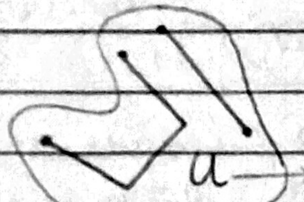
(*) Η $\bar{\gamma}$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη.



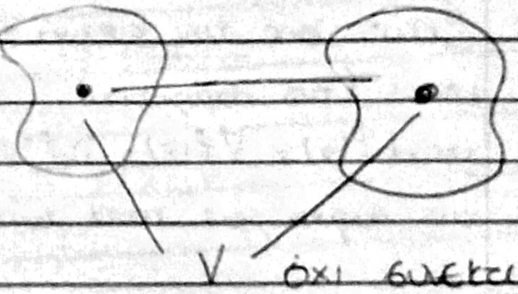
Θεώρημα: (εγκυκλοπαιδικά) καμπύλης του Jordan

Κάθε απλή κλειστή καμπύλη $C \subset \mathbb{R}^2$ διαχωρίζει το συμπλήρωμα της $[\mathbb{R}^2 \setminus C]$ σε δύο ανοικτά και συνεκτικά(*) υποσύνολα των οποίων αποτελεί το σύνορο και εκ των οποίων το ένα είναι φραγμένο και ονομάζεται εσωτερικό της καμπύλης C (**)

(*): Ένα $U \subset \mathbb{R}^n$ ονομάζεται (οδικά συνεκτικό), αν $\forall \bar{x}, \bar{y} \in U$ υπάρχει καμπύλη (συνεχής) $\bar{\gamma}: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ με $\bar{\gamma}([a,b]) \subset U$ και $\bar{\gamma}(a) = \bar{x}$, $\bar{\gamma}(b) = \bar{y}$ (δηλ. κάθε δύο σημεία του U μπορούν να «ενωθούν» μέσω μιας καμπύλης που βρίσκεται ολόκληρη μέσα στο U)



U → οδικά συνεκτικό



V όχι συνεκτικό

(**) όχι το $\mathring{C} = \operatorname{int} C$

Καμπύλες:

Ορισμοί:
- → παραμ. καμπύλες και εικόνα τους
- → εφαπτόμενο διάνυσμα καμπύλης
- → απλή καμπύλη
- → κλειστή καμπύλη
- → απλή κλειστή καμπύλη
- → κανονική καμπύλη

⇒ Διαφορίσιμες ή μερικώς διαφ. συναρτήσεις $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτ

$$\left\{ \bar{f} \text{ διαφ. στο } \bar{x} \in U \Leftrightarrow \lim_{\bar{u} \to \bar{0}} \frac{\bar{f}(\bar{x}+\bar{u}) - \bar{f}(\bar{x}) - J\bar{f}(\bar{x}) \cdot \bar{u}}{\|\bar{u}\|} = \bar{0} \right\}$$

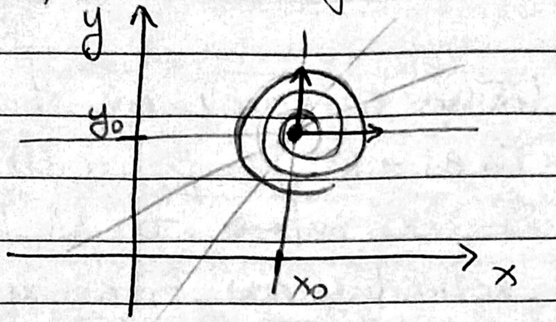
$$\boxed{J\bar{f}(\bar{x}) = D\bar{f}(\bar{x})}$$

Υπενθύμιση: Η μερική παράγωγος $\frac{df}{dx}(x_0, y_0) = \tilde{f}'(x_0)$

όπου $\tilde{f}(x) = f(x, y_0) \Rightarrow \tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

αν $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ η $\tilde{f}$ είναι η $f'|_{\mathbb{R}\times\{y_0\}}$

δηλ. η $\tilde{f}$ είναι ο περιορισμός της f σαν ευθεία $\{(x, y_0) : x \in \mathbb{R}\}$ παράλληλη στον άξονα των x και περνάει από το $(0, y_0)$



Εκτός από την έννοια της μερικής παραγώγου $\frac{df}{dx_i}(\bar{x})$ και της κλίσης (της παραγώγου)

grad $f(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x}) = Df(\bar{x})$ μιας $f : U \to \mathbb{R}$, υπάρχει και η έννοια της παραγώγου κατά κατεύθυνση $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|\bar{v}\| = 1$

Ορισμός:

Έστω $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό $\bar{x} \in U$ και $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ με $\|\bar{v}\| = 1$.

Το $\left(D_{\bar{v}} f(\bar{x}) = \right) \frac{df}{d\bar{v}}(\bar{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x} + h\bar{v}) - f(\bar{x})}{h}$ λέγεται, αν $\exists$,

(δε θα το υπολογίζουμε)

παράγωγος κατά κατεύθυνση $\bar{v}$.

Παρατήρηση: $\frac{df}{d\bar{e}_i}(\bar{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x} + h\bar{e}_i) - f(\bar{x})}{h} = \frac{df(\bar{x})}{dx_i}$

Πρόταση:

Έστω $f : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ αν f διαφορίσιμη στο $\bar{x}$

$\Longrightarrow$

$\not\Longleftarrow$

$$\frac{df}{d\bar{v}}(\bar{x}) = \underbrace{\nabla f(\bar{x})}_{Df(\bar{x})} \cdot \bar{v}$$

No. Date

$$\left[\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial e_i}(\bar{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) = \nabla f(\bar{x})\,\bar{e}_i = \right.$$

$$\left. = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x})\right)(0,\dots,0,\underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-θέση}}}{1},0,\dots,0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})\right]$$

<u>απόδειξη</u>

Έστω $\bar{\Phi}:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}^n$, $\varepsilon>0$, $\bar{\Phi}(h)=\bar{x}+h\bar{v} \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{\Phi}'(0) = D\bar{\Phi}(0) = \bar{v}$

$$\left(\text{γιατί: } \lim_{h\to 0}\frac{\bar{\Phi}(h)-\bar{\Phi}(0)-\bar{v}h}{h} = \bar{0}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{x}) = \lim_{h\to 0}\frac{f(\bar{\Phi}(h))-f(\bar{\Phi}(0))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(f\circ\bar{\Phi})(h)-(f\circ\bar{\Phi})(0)}{h} = (f\circ\bar{\Phi})'(0) \xrightarrow{\text{κανόνας αλυσίδας}}$$

$$= D(f\circ\bar{\Phi})(0) = \underbrace{Df(\bar{\Phi}(0))}_{=\nabla f(\underbrace{\bar{\Phi}(0)}_{=\bar{x}})}\ \underbrace{D\bar{\Phi}(0)}_{=\underbrace{\bar{\Phi}'(0)}_{=\bar{v}}} = \nabla f(\bar{x})\cdot\bar{v}$$